**МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ**

**НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ**

**ВІДОКРЕМЛЕНИЙ СТРУКТУРНИЙ ПІДРОЗДІЛ**

**«РІВНЕНСЬКИЙ ФАХОВИЙ КОЛЕДЖ НАЦІОНАЛЬНОГО УНІВЕРСИТЕТУ БІОРЕСУРСІВ І ПРИРОДОКОРИСТУВАННЯ УКРАЇНИ»**



**ВИЩА МАТЕМАТИКА Робочий зошит для виконання практичних робіт з дисципліни здобувачами освіти спеціальності 076 Підприємництво, торгівля та біржова діяльність**

**РІВНЕ**

Укладачі:

**Петрівська Л.О.** – викладач математичних дисциплін, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист, магістр математики;

**Юхимчук Ю.П.** – викладач математичних дисциплін, спеціаліст вищої категорії, магістр математики.

Рецензент

**Тригубець Л.Р.** – викладач математичних дисциплін, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист.

Робочий зошит для виконання практичних робіт розроблений відповідно до типової навчальної програми дисципліни «Вища математика» для здобувачів освіти спеціальності 076 Підприємництво, торгівля та біржова діяльність.

Зміст практичних робіт охоплює такі розділи вищої математики: лінійна алгебра, аналітична геометрія та математичний аналіз, що рекомендовані типовою навчальною програмою з дисципліни.

Методична розробка містить зміст, вступ, завдання для практичних робіт, інформаційні джерела, глосарій. Кожна практична робота складається з теми, мети заняття, коротких теоретичних відомостей, варіантів завдань для самостійної роботи, контрольних запитань.

Даний робочий зошит рекомендується використовувати викладачами математичних дисциплін під час проведення практичних занять з вищої математики.

Рекомендовано цикловою комісією загальноосвітніх дисциплін

Протокол № 1 від 30 серпня 2022 року

**Зміст**

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **Вступ** | |  |
| ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1 | | |
| **Тема. Визначники ІІ-го і ІІІ-го порядків** | |  |
| **практична робота 1** | Обчислення визначників ІІ-го і ІІІ-го порядків.  Знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень елементів визначників. |  |
| **Тема. Матриці та їх властивості** | |  |
| **практична робота 2** | Операції над матрицями. Знаходження оберненої матриці. |  |
| **Тема. Системи лінійних рівнянь** | |  |
| **практична робота 3** | Розв’язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера. Матричний спосіб розв’язування систем лінійних рівнянь. |  |
| ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2 | | |
| **Тема. Скалярний, векторний та мішаний добутки векторів** | |  |
| **практична робота 4** | Знаходження скалярного, векторного та мішаного добутку векторів. |  |
| **Тема. Пряма на площині** | |  |
| **практична робота 5** | Дослідження взаємного розміщення двох прямих на площині. Знаходження кута між прямими на площині. Знаходження відстані від точки до прямої. |  |
| **Тема. Криві другого порядку** | |  |
| **практична робота 6** | Розв’язування задач на знаходження рівнянь та деяких характеристик кривих другого порядку. |  |
| ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3 | |  |
| **Тема. Границя і неперервність функції** | |  |
| **практична робота 7** | Розв’язування задач на обчислення границь функцій. Розкриття невизначеностей*.* |  |
| **Тема. Похідна функції. Застосування похідної** | |  |
| **практична робота 8** | Загальна схема дослідження функцій та побудова їх графіків. Застосування похідної для дослідження динаміки функцій. |  |
| **Тема. Функція багатьох змінних.** | |  |
| **практична робота 9** | Знаходження частинних похідних та повного диференціала. |  |
| ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 4 | |  |
| **Тема. Невизначений інтеграл** | |  |
| **практична робота 10** | Знаходження невизначених інтегралів основними методами. |  |
| **Тема. Визначений інтеграл** | |  |
| **практична робота 11** | Обчислення визначених інтегралів основними методами. Застосування визначених інтегралів до розв’язування задач економічного змісту. |  |
| **Тема. Диференціальні рівняння першого порядку** | |  |
| **практична робота 12** | Розв’язування диференціальних рівнянь з відокремленими та відокремлюваними змінними. |  |
|  |  |  |
| **Рекомендовані джерела інформації** | |  |
| **Короткий словник математичних термінів** | |  |

**Вступ**

*«З усіх мов світу найкраща мова штучна,*

*вельми стисла мова, мова* ***математики****»*

*М. Лобачевський*

Сучасна математика інтенсивно проникає в усі сфери діяльності людини, об’єктивно відображаючи універсальні закони оточуючого світу. Сьогодні інтелектуал, прагнучи мати доступ до світової науки, зробити особистий внесок в її розвиток, вдосконалити своє логічне і абстрактне мислення, творчо і розумно користуватись комп’ютерною технікою, навіть тоді, коли йдеться про пошук у галузі гуманітарних наук, повинен знати математичні дисципліни, володіти математичною культурою. Інколи математична культура ближча до науки, інколи до мистецтва; вона може бути і дотичною до них.

Математика у свідомості студентів, магістрів, аспірантів та й самих викладачів, управлінських працівників повинна бути не просто стрункою системою знань, що відірвана від життєвих завдань суспільства, а повноправним методом дослідження, нерозривно зв’язаним із проблемами управління технічними і економічними процесами, проблемами найефективнішого використання природних та економічних ресурсів, могутньою зброєю пізнання навколишнього світу.

В Україні на вагу золота повинні цінуватися ті спеціалісти, які досконало оволоділи елементами прикладної математики і не є вузькими ремісниками, а творцями у своїй справі. Такому спеціалістові, поряд з математикою, потрібні й глибокі знання предметної галузі.

Пропонований робочий зошит для виконання практичних робіт призначений для узагальнення і систематизації знань, формуванні вмінь та навиків під час вивчення основних розділів вищої математики, рекомендованих типовою навчальною програмою Міністерства освіти і науки України для закладів фахової передвищої освіти.

Його метою є забезпечення ґрунтовного засвоєння основних розділів вищої математики, розкриття в доступному вигляді основних понять і теорем, сприяння формуванню навичок у застосуванні методів вищої математики, допомагати студентам при самостійному вивченні матеріалу та розв’язуванні задач.

Підібрані спеціальні вправи і задачі будуть сприяти повторенню і поглибленому вивченню відповідного розділу з дисципліни та сприятимуть підвищеному інтересу здобувача до занять з математики, а також використанню математичних методів фахівцями економіки та менеджменту.

Теоретичний матеріал і практичні завдання можуть бути корисними викладачам та студентам у процесі підготовки до занять, самостійного опрацювання матеріалу, систематизації та узагальненні знань, вмінь, навиків при підготовці до модульного та підсумкового контролю зі змістових модулів дисципліни.

Даний робочий зошит може знайти застосування в педагогічній діяльності викладачів вищих навчальних закладів, як очної так і заочної форм навчання.

****ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 1

**Сторінка історії**

У 18-19 століттях в алгебрі основні зусилля математиків були спрямовані на розв’язання декількох проблем, серед яких – розв’язування систем алгебраїчних рівнянь з кількома невідомими. Над нею працювали Г. Лейбніц, К. Маклорен, Г. Крамер, П. Лапласс, К. Гаусс та інші. Дослідження систем лінійних рівнянь спричинило виникнення таких понять, як визначник і матриця. Основи теорії визначників закладено в роботах Г. Крамера, їх строга дедуктивна теорія побудована О.Коші в 1815 р., а з 40-х років вони стають універсальним інструментом в алгебрі й аналізі. З часом відбувається відокремлення понять ***матриця і визначник***. Остаточно це відокремлення відбулося в роботах А. Келі та Д. Сільвестера. Останній ввів термін «матриця» у 1850 р. Основи матричного числення викладені А. Келі в роботі «Мемуар з теорії матриць» (1858). Розробка теорії матриць і визначників сприяла розвитку теорії квадратичних форм і теорії інваріантів рівнянь. Всі ці теорії пізніше лягли в основу формування нової галузі алгебри – **лінійної алгебри**.

**Тема. Визначники ІІ-го і ІІІ-го порядків.**

Практичне заняття № 1

Тема заняття: *Обчислення визначників ІІ-го і ІІІ-го порядків.*

*Знаходження мінорів та алгебраїчних доповнень елементів визначника.*

Мета заняття: *навчитися обчислювати визначники двома способами; знаходити мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначника.*

*Виховувати у студентів професійні якості, уважність, охайність, осмислене ставлення до виконуваної роботи.*

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** *означення та властивості визначників ІІ-го і ІІІ-го порядків, основні методи обчислення визначників.*

**вміти** *обчислювати визначники ІІ-го і ІІІ-го порядків двома способами; застосовувати властивості визначників при їх обчисленні; знаходити мінори та алгебраїчні доповнення елементів визначника.*

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** Означення визначників ІІ-го і ІІІ-го порядків.

1. *Визначником другого порядку* називається число, яке знаходиться за формулою:

.

2. *Визначником третього порядку* називається число, яке знаходиться за формулою:



або за теоремою.

**Теорема.** Визначник дорівнює сумі добутків елементів будь-якого рядка (стовпця) на їх відповідні алгебраїчні доповнення.

Тобто

, або



3. *Властивості визначників довільного порядку*:

1. визначник не змінюється, якщо рядки поміняти на відповідні стовпці, а стовпці − на рядки;
2. при перестановці двох рядків (стовпців) абсолютна величина визначника не змінюється, а знак змінюється на протилежний;
3. якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) дорівнюють нулю, то визначник теж дорівнює нулю;
4. визначник, у якому є два однакових рядки (стовпці), дорівнює нулю;
5. якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) мають спільний множник, то його можна винести за знак визначника;
6. визначник, у якого всі елементи одного рядка (стовпця) пропорційні до відповідних елементів іншого рядка (стовпця), дорівнює нулю;
7. якщо всі елементи деякого рядка (стовпця) визначника є сумою двох доданків, то визначник можна подати у вигляді суми двох визначників. При цьому елементи розглянутого рядка (стовпця) в першому визначнику є першими доданками, а елементи відповідного рядка (стовпця) другого визначника − другими доданками;
8. визначник не змінюється, якщо до всіх елементів довільного рядка (стовпця) додати елементи іншого рядка (стовпця), помножені на одне і те ж саме число;
9. сума попарних добутків елементів деякого рядка (стовпця) на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця) дорівнює нулю.

*Мінором М елемента а* *визначника* називається визначник, який утворюється з даного визначника в результаті ви креслення *і*-го рядка та *j*-го стовпця. Наприклад, для визначника третього порядку мінорами елементів *а* і *а* є



*Алгебраїчним доповненням А* *елемента а* називається його мінор, взятий зі знаком (-1), тобто .

Зміст і послідовність виконання завдань

Завдання для колективної роботи

Обчислити визначники:

1.1. . 1.2. . 1.3. .

1.4. . 1.5. . 1.6. .

1.7. . 1.8. . 1.9. .

Обчислити визначники, розклавши їх за елементами першого стовпчика:

1.10. . 1.11. .

Знайти змінну  з даного рівняння:

1.12. . 1.13. .

Завдання для індивідуальної роботи

Варіант-1

1. Обчислити визначники:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) .

2. Обчислити визначник, користуючись властивостями визначників:

.

3. Обчислити визначник, розклавши його за елементами рядка або стовпця, що містить букви:

.

4. Розв’язати рівняння: .

Варіант-2

1. Обчислити визначники:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) .

2. Обчислити визначник, користуючись властивостями визначників:

.

3. Обчислити визначник, розклавши його за елементами рядка або стовпця, що містить букви:.

4. Розв’язати нерівність: .

Варіант-3

1. Обчислити визначники:

а) ; б) ; в) ; г) ; д) ; е) .

2. Обчислити визначник, користуючись властивостями визначників:

.

3. Обчислити визначник, розклавши його за елементами рядка або стовпця, що містить букви:

.

4. Розв’язати рівняння: .

Методичні рекомендації з виконання і оформлення: оформити результати, написати висновки.

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 13 п. 13.3 с.259;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р І Глава І § 2 с. 12.*

Контрольні питання.

1. Що називається визначником другого порядку? Як обчислюється визначник другого порядку?

2. Що називається визначником третього порядку? Як обчислюється визначник третього порядку?

3. Сформулювати основні властивості визначників.

4. Що називається мінором та алгебраїчним доповненням елемента визначника?

5. Сформулювати теорему про розклад визначника за елементами рядка або стовпця.

6. Чому дорівнює сума елементів довільного рядка (стовпця) визначника на алгебраїчні доповнення відповідних елементів іншого рядка (стовпця)?

7. Як обчислюються визначники вищих (четвертого, п’ятого) порядків?

**Тема. Матриці та їх властивості.**

Практичне заняття № 2

Тема заняття: *Операції над матрицями. Знаходження оберненої матриці.*

Мета заняття: навчитися виконувати основні дії над матрицями; знаходити матрицю, обернену до даної.

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** основні види матриць та дії, які можна виконувати над матрицями; способи знаходження оберненої матриці; означення рангу матриці та способи його обчислення.

**вміти** виконувати дії над матрицями; знаходити обернену матрицю; обчислювати ранг матриці.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** ***Матрицею***називається прямокутна таблиця чисел, яка складається з  рядків та  стовпців. Позначається

.

Якщо кількість рядків дорівнює кількості стовпців, то така матриця називається ***квадратною***.

***Визначником***квадратної матриці називається число:

.

1. Якщо у квадратній матриці всі елементи, крім елементів головної діагоналі, дорівнюють нулю, то така матриця називається ***діагональною***.
2. Якщо у діагональній матриці елементи головної діагоналі дорівнюють одиницям, то матриця називається ***одиничною*** і позначається :
3. Матриця, визначник якої дорівнює нулю, називається ***особливою*** (або ***виродженою***). Якщо визначник матриці не дорівнює нулю, то матриця ***неособлива*** (***невироджена***).
4. Матриця, яка складається тільки з одного рядка, називається ***матрицею*** *–* ***рядком***: . Аналогічно матриця, яка складається з одного стовпця, називається ***матрицею – стовпцем***: .
5. Дві матриці вважаються ***рівними***, якщо вони мають однакову кількість рядків і стовпців, а їх відповідні елементи рівні.
6. Дві матриці називаються ***еквівалентними***, якщо одна з них отримана з іншої шляхом виконання скінченого числа елементарних перетворень.

Елементарними перетвореннями матриць називають наступні операції:

а) перестановка двох рядків або стовпців матриці;

б) домноження всіх елементів будь-якого рядка (стовпця) на одне і теж число, від мінне від нуля;

в) додавання до елементів будь-якого рядка (стовпця) відповідних елементів іншого рядка (стовпця), домножених на одне й теж число.

***Матриця* **називається ***оберненою***до матриці , якщо виконується умова:

*.*

Обернена матриця має вигляд: , де  – алгебраїчні доповнення всіх елементів даної матриці .

Зміст і послідовність виконання завдань

Завдання для колективної роботи

1. Знайти суму та різницю двох матриць:

1. , .

2. , .

3. , .

2. Помножити матрицю на число: а) ; б) .

3. Перемножити матриці: а) ; б) .

4. Знайти матрицю  якщо , .

5. Знайти обернені матриці до матриць:

а) . б) .

Завдання для індивідуальної роботи

Варіант-1

1. Дано матриці  і .

Знайти: а) ; б) ; в) .

2. Знайти добуток матриць , якщо: , .

3. Знайти матрицю, обернену до даної: .

4. Знайти ранг матриці .

5. Розв’язати матричне рівняння: .

Варіант-2

1. Дано матриці  і .

Знайти: а) ; б) ; в) .

2. Знайти добуток матриць , якщо: , .

3. Знайти матрицю, обернену до даної: .

4. Знайти ранг матриці .

5. Розв’язати матричне рівняння:

.

Методичні рекомендації з виконання і оформлення: оформити результати, написати висновки.

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 13 п. 13.1, п. 13.2 с.253;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р І Глава І § 1 с. 11.*

Контрольні питання

1. Що називається матрицею?

2. Дати означення квадратної, діагональної, нульової та одиничної матриць.

3. Що називається розміром матриці? Що таке порядок квадратної матриці?

4. Дати означення визначника матриці.

5. Як визначається: сума двох матриць, добуток матриці на число, різниця двох матриць?

6. Як визначається добуток двох матриць? Яка умова повинна виконуватись для множення двох матриць?

7. Дати означення оберненої матриці. Сформулюйте теорему про існування оберненої матриці.

8. Як знайти матрицю, обернену до даної матриці?

9. Що називається рангом матриці? Як знаходиться ранг матриці?

**Тема. Системи лінійних рівнянь**

Практичне заняття № 3

Тема заняття: *Розв’язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера. Матричний спосіб розв’язування систем лінійних рівнянь.*

Мета заняття: навчитися розв’язувати системи трьох лінійних рівнянь з трьома змінними двома способами.

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** формули Крамера; алгоритм розв’язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) матричним методом; алгоритм методу Гаусса для розв’язання СЛАР з використанням елементарних перетворень.

**вміти** розв’язувати системи лінійних рівнянь основними методами; розв’язувати складніші задачі матричної алгебри на дослідження та обґрунтовувати раціональність обраного способу розв’язання; використовувати визначники та матриці при розв’язанні задач економічного спрямування.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** Нехай дано систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома змінними:

;

Система лінійних рівнянь називається **сумісною**, якщо вона має хоча б один розв’язок і **несумісною**, якщо вона не має жодного розв’язку.

Для того, щоб розв’язати дану систему лінійних рівнянь за формулами Крамера, спочатку необхідно знайти визначник системи.

Якщо визначник даної системи відмінний від нуля (), то система сумісна (має **єдиний** розв’язок), який знаходять за формулами Крамера:

; , .

; , , .

Матричний метод.

Розглянемо систему трьох лінійних алгебраїчних рівнянь з трьома невідомими:

.

Елементи даної системи лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) можна умовно поділити на три групи: коефіцієнти  біля невідомих величин, самі невідомі  та вільні члени  – значення, що розміщені після знаку рівності. Тому, використовуючи поняття матриці та дій над матрицями, дану систему можна подати у матричному вигляді

,

де  – матриця коефіцієнтів біля невідомих,  – матриця-стовпець вільних членів,  – матриця-стовпець невідомих.

Для того, щоб розв’язати СЛАР (знайти невідомі значення матриці *Х*), її необхідно помножити зліва (порядок розміщення матриць при множенні суттєвий) на обернену матрицю,



Метод Гаусса.

Даний метод полягає у послідовному виключенні невідомих з рівнянь системи. Шляхом еквівалентних перетворень зводимо розширену матрицю до діагонального вигляду.

 .

З третього рівняння знаходимо змінну , з другого – *у*, з першого – *х*.

Зміст і послідовність виконання завдань

Розв’язати систему лінійних рівнянь:

1) матричним методом;

2) за формулами Крамера;

3) методом Гаусса.

|  |  |
| --- | --- |
| а) | б) |
| в) | г) |

Методичні рекомендації з виконання і оформлення: оформити результати, написати висновки.

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 13 п. 13.5 с.270;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р І Глава І § 4 с. 31.*

 Контрольні питання.

1. Яка система лінійних рівнянь називається сумісною, несумісною, визначеною, невизначеною?

2.Які системи лінійних рівнянь називаються еквівалентними?

3. Як розв’язати систему рівнянь за формулами Крамера?

4. У чому полягає суть методу Гаусса?

5.Сформулювати теорему Кронекера-Капеллі.

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 2

****

В першій половині 17 століття виникла принципово нова галузь математики – аналітична геометрія, в якій за допомогою координатного методу геометричні об’єкти стали досліджуватися засобами алгебри.

Вважається, що основи нової геометрії заклав Р. Декарт в своєму трактаті «Геометрія» (1637). Але він небагато досяг в даній галузі, бо недосконалою була його система координат, в якій не розглядалися від’ємні абсциси. Виявляється, що не менше значення мають роботи П. Ферма, проте більшість із них були опубліковані вже після смерті автора, що дозволило роботам Р. Декарта отримати пріоритет.

Використав і дещо розвинув аналітичну геометрію І. Ньютон у творі «Перелік кривих третього порядку» (1704). В цій роботі автор розкрив нові можливості координатного методу й удосконалив сам метод – ввів рівноправні осі координат, визначив знаки функцій в усіх квадрантах, створив основи дослідження властивостей кривих за властивостями рівнянь, що їх виражають, навів класифікацію кривих, поклавши в основу степені рівнянь.

Побудову аналітичної геометрії у формі, звичній для нас, завершив Л. Ейлер, який у другому томі книги «Вступ до аналізу нескінченно малих» (1748) ввів прямолінійні координати (як прямокутні, так і косокутні), роз’яснив спосіб запису рівнянь кривих, розглянув перетворення систем координат – поворот і перенос, з’ясував спільні властивості всіх конічних перерізів тощо.

У 18 столітті завершено формування аналітичної геометрії як науки. Тоді ж відбулось і становлення її як навчального предмету, складової частини вищої математичної та технічної освіти.

**Тема. Знаходження скалярного, векторного та**

**мішаного добутків векторів**

Практична робота № 4

Тема: *Знаходження скалярного, векторного та мішаного добутків векторів.*

Мета: навчитися знаходити скалярний, векторний та мішаний добутки векторів;

обчислювати кут між векторами; площу паралелограма.

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** означення та основні властивості скалярного і векторного добутків; сформувати поняття про мішаний добуток векторів.

**вміти** записувати та обчислювати кут між векторами, знаходити векторний добуток векторів, обчислювати площу трикутника і паралелограма.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** Розглянемо означення і властивості скалярного добутку векторів.

Координати вектора , якщо відомо координати його кінців , , .

Довжина вектора : .

Нехай дано вектор з координатами .

Довжина вектора дорівнює: .

Нехай дано вектори з координатами  і .

Скалярний добуток векторів  через їхні координати дорівнює:

,

, де  - кут між векторами.

,

, .

Якщо вектори перпендикулярні, то скалярний добуток векторів дорівнює нулю: якщо , то =0.

Якщо скалярний добуток векторів дорівнює нулю, то вектори перпендикулярні: якщо =0, то .

Якщо два вектори  і колінеарні, то їхні координати пропорційні:  і , .

Векторний добуток векторів.

**Векторним добутком** двох векторів  і  називають такий вектор , який позначається  і задовольняє умови:

1)  і 

2)  , де ; (1)

3)  направлений так, що з кінця цього вектора поворот від  до  видно проти годинникової стрілки

***φ***

***ā***

***b***

***c***

Мал.1

Довжина вектора  чисельно дорівнює площі паралелограма, побудованого на векторах  і  як на сторонах.

***Властивості векторного добутку*.**

1. При перестановці множників векторний добуток змінює знак на протилежний (переставна властивість):

 (2)

1. Сталий множник можна винести за знак векторного добутку (сполучна властивість):

 (3)

1. Для будь-яких трьох векторів  має місце рівність (розподільна властивість):

 (4)

1. Якщо два вектори  і  колінеарні (ІІ), то їх векторний добуток дорівнює нулю, тобто

якщо ІІ, то  (5)

Це ***умова колінеарності векторів.***

***Зауваження.*** Враховуючи умову колінеарності, можна стверджувати, що

. (6)

Оскільки вектори  взаємно перпендикулярні, мають одиничні довжини і утворюють праву трійку, то

; ; ;

; ; ;

; ; .

Якщо розглянути два вектори  та , що задані своїми координатами в ортонормованому базисі 

 та 

то, використовуючи розподільну і сполучну по відношенню до скалярного множника властивості векторного добутку, дістанемо *формулу для обчислення векторного добутку векторів заданих розкладом за ортонормованим базисом*:

 (7)

На практиці частіше використовується ще одна формула, *для обчислення векторного добутку векторів* , , *що задані* *координатами*:

 (8)

***Означення. Мішаним добутком трьох векторів*** * називається скалярний добуток вектора  на векторний добуток векторів  і .*

З геометричної точки зору мішаний добуток трьох векторів дорівнює об’єму паралелепіпеда, побудованого на цих векторах, якщо вони утворюють праву трійку, і дорівнює об’єму паралелепіпеда , взятому із знаком «мінус», якщо вектори утворюють ліву трійку.

**Властивості мішаного добутку**.

1. Від циклічної перестановки векторів мішаний добуток не змінюється (переставна властивість):

 (10)

2. Якщо у мішаному добутку переставити місцями два сусідні вектори, то мішаний добуток змінить знак на протилежний :

 (11)

3. Якщо вектори  компланарні, то їх мішаний добуток дорівнює нулю, тобто:

 (12)

і навпаки, якщо мішаний добуток трьох векторів дорівнює нулю, то вони обов’язково компланарні. Це ***умова компланарності векторів***.

Якщо вектори задані своїми координатами в ортонормованому базисі

, то мішаний добуток обчислюється за допомогою формули:

 (13)

На практиці, при обчисленні мішаного добутку, зручніше користуватися визначником.

***Правило.*** Якщо вектори ** задані своїми координатами, тобто , , , то мішаний добуток трьох векторів обчислюється за формулою:

 (14)

Зміст і послідовність виконання завдань.

Розв’язати задачі по варіантах.

|  |
| --- |
| Варіант – 1  1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах  і ,  якщо , .  2. Визначити, якою трійкою (правою чи лівою) є трійка векторів , , ,  якщо , , .  3. Трикутник задано вершинами ,  і .  Знайти:  а) рівняння сторін трикутника ;  б) кут ;  в) рівняння висоти ;  г) довжину медіани . |
| Варіант – 2  1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах  і ,  якщо , .  2. Визначити, якою трійкою (правою чи лівою) є трійка векторів , , ,  якщо , , .  3. Трикутник задано вершинами ,  і .  Знайти:  а) рівняння сторін трикутника ;  б) кут ;  в) рівняння висоти ;  г) довжину медіани . |
| Варіант – 3  1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах  і ,  якщо , .  2. Визначити, якою трійкою (правою чи лівою) є трійка векторів , , ,  якщо , , .  3. Трикутник задано вершинами  і .  Знайти:  а) рівняння сторін трикутника ;  б) кут ;  в) рівняння висоти ;  г) довжину медіани ;  д) рівняння прямої, паралельної до сторони . |
| Варіант – 4  1. Обчислити площу паралелограма, побудованого на векторах  і ,  якщо , .  2. Визначити, якою трійкою (правою чи лівою) є трійка векторів , , ,  якщо , , .  3. Трикутник задано вершинами ,  і .  Знайти:  а) рівняння сторін трикутника ;  б) кут ;  в) рівняння висоти ;  г) довжину медіани ;  д) рівняння прямої, паралельної до сторони . |

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 15 п. 15.1 с.301;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р І Глава ІІІ § 2 с. 127.*

 Контрольні питання.

1. Як знайти довжину вектора, знаючи координати точок початку та кінця?

2. Які два вектори називаються колінеарними.

3. Яка умова перпендикулярності двох векторів?

4. Що розуміють під векторним добутком векторів?

5. За якою формулою обчислюється векторний добуток векторів?

6. Що розуміють під мішаним добутком векторів?

7. За якою формулою обчислюється мішаний добуток векторів?

**Тема. Пряма на площині**

Практична робота № 5

Тема: *Дослідження взаємного розміщення двох прямих на площині. Знаходження кута між прямими на площині. Знаходження відстані від точки до прямої.*

Мета: навчитися записувати рівняння прямих на площині, обчислювати кут між двома прямими; перевіряти умови паралельності та перпендикулярності прямих на площині; знаходити відстань від точки до прямої.

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** різні види рівнянь прямої на площині; умови паралельності та перпендикулярності двох прямих.

**вміти** записувати рівняння прямої; знаходити відстань від точки до прямої; обчислювати кут між двома прямими.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** Розглянемо основні види рівнянь прямої на площині.

1. Загальне рівняння прямої: .

Якщо в одержаних рівняннях виконати певні алгебраїчні перетворення, то всі вони будуть зведені до загального рівняння прямої.

1. Рівняння прямої, що проходить через дві точки:

.

1. Рівняння прямої, що проходить через задану точку з відомим напрямним вектором (канонічне рівняння прямої):

.

1. Рівняння прямої, що проходить через дану точку, перпендикулярно до даного вектора (нормальне рівняння прямої):

.

1. Рівняння прямої з заданим кутовим коефіцієнтом:

.

1. Рівняння прямої у відрізках на осях: .

Нехай дві прямі задані загальними рівняннями відповідно.

Тоді

умова паралельності цих прямих має вигляд ,

умова перпендикулярності .

Для прямих, що задані рівняннями  відповідно

умова паралельності цих прямих має вигляд ,

умова перпендикулярності , або .

Для прямих, що задані рівняннями  і  відповідно

умова паралельності цих прямих має вигляд ,

умова перпендикулярності .

Зміст і послідовність виконання завдань

Розв’язати наступні задачі

1. Складіть рівняння сторін трикутника, вершинами якого є точки:

а)  б) .

2. а) Трикутник задано вершинами; , , . Запишіть рівняння медіани .

б) Трикутник задано вершинами; , , . Запишіть рівняння медіани .

3. Знайдіть вершини трикутника, якщо його сторони задано рівняннями:

, , 

4. Знайдіть гострий кут між двома прямими, якщо

а) перша з них проходить через точки  і , а друга – через точки

 і .

б) перша з них проходить через точки  і , а друга – через точки

 і .

5. Складіть рівняння прямої, що проходить через точку перетину прямих

 і  перпендикулярно до прямої .

6. Знайдіть відстань:

а) від точки до прямої ;

б) від точки до прямої .

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 15 п. 15.1 с.301;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р І Глава ІІІ § 2 с. 127.*

 Контрольні питання.

1.Які ви знаєте рівняння прямої?

2. Які умови паралельності та перпендикулярності прямих?

3. Як обчислити відстань від точки до прямої?

**Тема. Криві другого порядку**

Практична робота № 6

Тема: *Розв’язування задач на знаходження рівнянь та деяких характеристик кривих другого порядку.*

Мета: навчитися записувати канонічні рівняння кривих другого порядку: кола, еліпса, гіперболи та параболи; знаходити координати фокусів, довжини пів осей, ексцентриситет.

**** Після вивчення теми студент повинен

**Знати**: канонічні рівняння кривих другого порядку: кола, еліпса, гіперболи та параболи; характеристики кривих.

**Вміти**: записувати канонічні рівняння кривих другого порядку: кола, еліпса, гіперболи та параболи; знаходити координати фокусів, довжини пів осей, ексцентриситет.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** *Колом* називається множина точок площини, для яких відстані до заданої точки площини (центра кола) дорівнюють сталому числу (радіусу).

Нехай  – центр кола,  – довільна точка площини,  – радіус кола. Точка лежить на колі лише тоді, коли  або

 – *рівняння кола.*

Якщо центр кола лежить у початку координат, то , а рівняння кола має вигляд:

 – *канонічне рівняння кола*.

*Еліпсом* називається множина всіх точок площини, для яких сума відстаней до двох даних точок цієї площини, які називаються *фокусами*, є величина стала і більша від відстані між фокусами.

 – *канонічне рівняння еліпса*

Еліпс перетинає осі координат у точках , , ,  – які називаються вершинами еліпса; величини  та  називаються відповідно *великою* та *малою осями еліпса;*  – більша піввісь,  – менша піввісь;

Отже, будь-який еліпс має дві взаємно перпендикулярні осі симетрії (головні осі еліпса) та центр симетрії (центр еліпса); весь еліпс вміщується у прямокутник зі сторонами  та , сторони прямокутника дотикаються до еліпса у його вершинах.

Міра відхилення еліпса від кола характеризується величиною , яка називається *ексцентриситетом еліпса* і дорівнює відношенню половини його фокальної відстані до довжини більшої півосі:

.

*Гіперболою* називається множина всіх точок площини, для яких модуль різниці відстаней до двох даних точок цієї площини, що називаються *фокусами*, є величина стала і менша відстані між фокусами.

Нехай  і  – фокуси гіперболи, відстань між ними дорівнює , модуль різниці відстаней від довільної точки гіперболи до фокусів дорівнює . За означенням .

 – *канонічне рівняння гіперболи*

Осі симетрії називаються осями гіперболи, а точка перетину осей – центром гіперболи; вісь  перетинає гіперболу в двох точках  та , які називаються *вершинами гіперболи*, і називається *дійсною віссю гіперболи*; вісь , яка не перетинає гіперболу, називається *уявною віссю*; величини  і  називаються відповідно *дійсною і уявною півосями гіперболи*;

*Ексцентриситет гіперболи* визначається як відношення половини фокальної відстані до довжини її дійсної півосі: .

Оскільки , то . .

*Параболою* називається множина всіх точок площини, кожна з яких знаходиться на однаковій відстані від даної точки, яка називається *фокусом*, і від даної прямої, яка називається *директрисою* і не проходить через фокус.

Нехай на площині задано точку  - фокус, і пряму – директрису, причому відстань від фокуса до директриси дорівнює . Візьмемо прямокутну систему координат  так, що вісь  проходить через фокус, перпендикулярно до директриси, а вісь  ділить відстань між фокусом  і директрисою навпіл. Фокус має координати , а рівняння директриси має вигляд: .

 – канонічне рівняння параболи.

Зміст і послідовність виконання завдань:

1. Скласти рівняння кола з центром у точці  і яке проходить через точку .

2. Знайти координати точок перетину кола  з прямою .

3. Скласти рівняння еліпса, якщо його вершини лежать у точках  і , а фокуси - в точках  і .

4. Скласти рівняння еліпса, якщо відстань між фокусами дорівнює 6 (фокуси лежать на осі ) і велика вісь дорівнює 10.

5. Дано еліпс . Знайти координати його вершин і довжини осей.

6. Дано рівняння гіперболи . Знайти координати її вершин, фокусів та ексцентриситет.

7. Скласти рівняння гіперболи за координатами її фокусів  і  та ексцентриситетом .

8. Скласти рівняння параболи з вершиною у початку координат, якщо її директрисою є пряма .

9. Скласти рівняння параболи з вершиною в початку координат, яка симетрична відносно осі  і проходить через точку .

Методичні рекомендації з виконання і оформлення: оформити результати, написати висновки.

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 16 п. 16.1 – 16.5 с.316;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р І Глава ІІІ § 3 с. 146.*

ЗМІСТОВИЙ МОДУЛЬ 3

****

Поняття функції має давню історію. Перші кроки на довгому шляху творення загального поняття функції зробили математики Стародавнього Вавилону. Вони склали таблиці обернених значень чисел, їх квадратів і кубів, сум квадратів і кубів чисел. У сучасному розумінні це були таблиці значень функцій , , , .

Довго саме поняття функції не було введено. Навіть у працях Р. Декарта, П. Ферма, І. Ньютона, Г. Лейбніца це поняття носило по суті інтуїтивний характер і пов’язувалося або з геометричними, або з механічними уявленнями Шлях до першого означення проклав Р. Декарт, увівши поняття змінної величини.

Наприкінці 17 століття Г. Лейбніц та його учні почали в дуже вузькому розумінні використовувати термін «функція», пов’язуючи його лише з геометричними образами. Вільне ж від геометричної мови означення сформулював у 1718 році Й Бернуллі: «Функцією змінної величини називається кількість, утворена яким завгодно способом з цієї змінної величини і сталих». Він позначав функцію . Це означення у 1755 році уточнив і узагальнив Л. Ейлер: «Коли деякі кількості залежать від інших таким чином, що при зміні останніх і самі вони підлягають зміні, то перші називаються функціями других». В одній із своїх робіт вчений навіть розглядав графік функції як криву, яка накреслена «вільним потягом руки». Для позначення функції він використав символ  – буква  – перша буква латинського слова function – функція.

М. Лобачевський, розвиваючи ейлерове означення функції (1834) писав: «Загальне означення вимагає, щоб функцією від  називали число, яке дається для кожного  і разом з поступово змінюється. Значення функції може бути задане або аналітичним виразом, або умовою, яка дає засіб випробовувати всі числа і вибирати одне з них; або, нарешті, залежність може існувати і залишатися невідомою…». У 1837 році німецький математик П. Діріхле сформулював таке означення: « є функцією від  (на відрізку), якщо кожному значенню  (з цього відрізка) відповідає певне значення , причому не має значення, яким чином встановлена ця відповідність – аналітичною формулою, графіком, таблицею або навіть просто словами».

Отже, в середині 19 століття після довготривалої полеміки поняття функції звільнилося від форми встановлення відповідності – головний наголос у новому загальному означенні робився на самій відповідності. А вже у другій половині 19 століття після створення теорії множин в означення функції, крім ідеї відповідності, включено ще й ідею множини.

**Тема. Границя і неперервність функції**

Практична робота № 7

Тема: *Розв’язування задач на обчислення границь функцій. Розкриття невизначеностей.*

Мета: навчитися застосовувати основні теореми про границі до обчислення границь деяких функцій, розкривати невизначеності.

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** означення та основні теореми про границі, першу і другу «визначні» границі; правила, які застосовують при розкритті невизначеностей.

**вміти** обчислювати границі функцій, розкривати невизначеності за допомогою теорем та перетворень функцій.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** Розглянемо функцію , де аргумент набуває всіх значень з певного проміжку .

Коли число *А* є границею функції  при , то значення функції  як завгодно близько наближаються до числа *А*.

Якщо , то .

  

***Означення****.* Число  називається **границею** функції  у точці , якщо для будь-якого додатного числа  знайдеться таке додатне число . що при всіх , , які задовольняють нерівність , виконується нерівність .

Якщо  то  – **єдина** .

**Основні теореми про границі**

1. Границя постійної функції  дорівнює постійній: 

2. Постійний множник можна виносити за знак границі:



3. Якщо функції  і  в точці  мають границі, то сума (різниця) цих функцій також мають у цій точці границю:



4. Якщо функції  і  в точці  мають границі, то добуток цих функцій також мають границю:



5. Якщо функції  і  в точці  мають границі і границя знаменника не дорівнює нулю (), то границя частки дорівнює частці границь:



Зміст і послідовність виконання завдань

Знайти границі заданих функцій:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| 1. а) |  | б) |  |
| в) |  | г) |  |
| 2. а) |  | б) |  |
| в) |  | г) |  |
| 3. а) |  | б) |  |
| в) |  | г) |  |
| 4. а) |  | б) |  |
| в) |  | г) |  |

Методичні рекомендації з виконання і оформлення: оформити результати, написати висновки.

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 4 п. 4.2 с.48;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р ІI Глава V § 3 - § 5 с. 209.*

 Контрольні питання.

1. Сформулюйте основні теореми про границі.

2. Чому дорівнює перша визначна границя?

3. Чому дорівнює друга визначна границя?

**Тема. Похідна функції. Застосування похідної.**

Практична робота № 8

Тема: *Загальна схема дослідження функцій та побудова їх графіків. Застосування похідної для дослідження динаміки функцій.*

Мета: навчитися досліджувати функції за допомогою похідної; на основі отриманих результатів будувати графіки функцій.

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** таблицю похідних елементарних функцій; правила знаходження похідних; схему дослідження функцій;

**вміти** досліджувати функції за допомогою похідної; будувати графіки функцій.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** Однією з найважливіших задач диференціального числення функції однієї змінної є дослідження функції та побудова її графіка.

Ця схема має наступний вигляд.

Схема дослідження функції:

1. Знайти область визначення та множину значень функції.
2. Знайти точки перетину графіка функції з осями координат. Для цього треба розв’язати дві системи рівнянь:

|  |  |
| --- | --- |
|  |  |

1. Дослідити функцію на періодичність, парність і непарність.
2. Знайти інтервали монотонності функції.
3. Знайти екстремальні точки функції і побудувати їх на площині.
4. Знайти другу похідну, прирівняти її до нуля (критичні точки ІІ роду) та визначити проміжки вгнутості кривої.
5. Знайти точки перегину графіка функції.
6. Записати рівняння вертикальних та похилих асимптот.
7. На підставі проведеного дослідження побудувати графік функції.

Зміст і послідовність виконання завдань

Завдання 1. Деякі властивості функції  описані у таблиці. Побудуйте схематичний графік функції, якщо вона неперервна на множині всіх дійсних чисел.

Таблиця 1

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | - 4 |  | 0 |  |
|  | – | 0 | + | 0 | – |
|  | спадає | -3 | зростає | 1 | спадає |
| Висновки |  | min |  | max |  |

Таблиця 2

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
|  |  | - 6 |  | -1 |  | 3 |  |
|  | + | 0 | – | 0 | + | 0 | – |
|  | зростає | 4 | спадає | -2 | зростає | 7 | спадає |
| Висновки |  | max |  | min |  | max |  |

Завдання 2. Знайти асимптоти кривої.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | 2. |
| 3. | 4. |

Завдання 3. Дослідити функцію та побудувати її графік.

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | 2. |
| 3. | 4. |

Методичні рекомендації з виконання і оформлення: оформити результати, написати висновки.

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 5 п. 5.10, п. 5.11 с.255;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р І Глава VІI § 4 с. 285.*

 Контрольні питання.

1. В чому полягає геометричний зміст похідної?

2. Схема дослідження функції на монотонність та екстремуми.

3. Схема дослідження функції на найменше і найбільше значення.

Практична робота № 9

Тема: *Обчислення частинних похідних та повного диференціала.*

Мета: навчитися знаходити частинні похідні, повний диференціал функцій двох змінних; досліджувати функцію двох змінних на екстремум.

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** означення та властивості функції двох змінних; етапи знаходження частинних похідних, схему дослідження функцій двох змінних на екстремум.

**вміти** знаходити частинні похідні першого та другого порядків, повний диференціал функції двох змінних; досліджувати функцію двох змінних на екстремум.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** Детально розглянемо функцію двох змінних.

Якщо кожній парі незалежних одне від одного чисел  з деякої множини за якимось правилом ставиться у відповідність одне або кілька значень змінної *z*, то змінна *z* називається **функцією двох змінних:** .

**Областю визначення** функції *z* називається сукупність пар , при яких функція *z* існує. Її позначають .

**Околом точки**  радіуса *r* називається сукупність всіх точок , які задовольняють умові .

Число *А* називається **границею** функції  при прямуванні точки  до точки , якщо для кожного числа  знайдеться таке число , що для будь-якої точки , для якої вірна умова , тобто виконується умова .

Записують .

Для того, щоб знайти частинні похідні першого порядку функції двох змінних , необхідно розглянути наступні поняття

Нехай у деякій області задана функція . Візьмемо довільну точку  і задамо приріст Δ*х* до змінної *х*. Розглянемо відношення

.

Тоді границю цього відношення при   будемо називати **частинною похідною** функції  по *х*

.

Частинну похідну функції  по змінній *х* можна позначати:



Аналогічно визначається частинна похідна функції по *y*.



**Геометричним змістом** частинної похідної (наприклад ) є тангенс кута нахилу дотичної, проведеної в точці  до перетину поверхні площиною .

**Приклад 1.** Знайти частинні похідні функції .

Розв’язання

Функція  є функцією двох змінних *x* і *y*. При знаходженні частинної похідної функції *z* по незалежній змінній *x* другу незалежну змінну потрібно розглядати як сталу. Тому  (похідна по *x* від  дорівнює нулю, як похідна від сталої величини). При знаходженні  незалежну змінну *x* розглядають як сталу величину, а тому 

Повним диференціаломфункції  називається вираз:

.

Для функції довільного числа змінних:

.

Частинні похідні вищих порядків

Якщо функція *f* (*x*, *y*) визначена в деякій області *D*, то її частинні похідні  й  теж будуть визначені в тій же області або її частині.

Будемо називати ці похідні **частинними похідними першого порядку.**

Похідні цих функцій будуть **частинними похідними другого порядку.**





Екстремуми функції

Для функції двох змінних, як і для функції однієї змінної, можна ввести поняття екстремуму. Вважають, що в точці  функція  досягає локального максимуму, якщо в околі точки  виконується нерівність  .

Аналогічно, в точці  функція  досягає локального мінімуму, якщо в околі цієї точки виконується нерівність .

Точки локального мінімуму і максимуму називаються точками екстремуму функції .

Для знаходження екстремальних значень функції двох змінних використовуються необхідні та достатні умови екстремуму.

Теорема 1. (Необхідна умова екстремуму функції).

Якщо в точці  функція  досягає екстремуму, то її частинні похідні першого порядку в цій точці дорівнюють нулю, тобто



Фактично ми отримуємо систему рівнянь для знаходження координат точки . Таких точок може бути декілька або не існувати зовсім. Точки, в яких частинні похідні першого порядку перетворюються в нуль, називаються точками підозрілими на екстремум, або критичними точками. Нехай в точці  виконується умова  і існують частинні похідні другого порядку. Введемо такі позначення:



і розглянемо число , тобто .

Теорема 2. (Достатня умова екстремуму функції).

Якщо , то в точці  функція  має екстремум, якщо  то екстремуму немає. Якщо  , то функція досягає мінімуму, якщо , то функція досягає максимуму.

Зміст і послідовність виконання завдань

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
|  | Варіант – 1 | Варіант – 2 |
| 1. Знайти частинні похідні функцій двох змінних |  |  |
| 2. Знайти повний диференціал |  |  |
| 3. Знайти екстремуми функції |  |  |

Методичні рекомендації з виконання і оформлення: оформити результати, написати висновки.

Рекомендована література: *Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.; Р V Глава X § 1 - § 8 с. 367.*

 Контрольні питання.

1. Сформулюйте означення функції двох змінних.

2. В чому полягає геометричний зміст частинної похідної першого порядку?

3. Який вираз називається повним диференціалом функції?

4. Яка умова існування екстремуму функції двох змінних?

**Тема. Невизначений інтеграл**

Практична робота № 10

Тема: *Знаходження невизначених інтегралів основними методами.*

Мета: навчитися знаходити невизначені інтеграли основними методами.

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** таблицю інтегралів елементарних функцій; властивості невизначених інтегралів; основні методи знаходження інтегралів.

**вміти** знаходити невизначені інтеграли безпосередньо, методом заміни змінної, інтегрування частинами.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** Сукупність  всіх первісних функції  на проміжку називають *невизначеним інтегралом* від функції  на цьому проміжку і позначають .

Властивості невизначеного інтегралу.

1. Похідна невизначеного інтегралу рівна підінтегральній функції, диференціал невизначеного інтегралу рівний підінтегральному виразу:



1. Диференціал невизначеного інтегралу дорівнює підінтегральному виразу

.

1. Невизначений інтеграл від диференціалу функції рівний цій функції:



1. Постійний множник можна винести за знак інтегралу:



1. Невизначений інтеграл від алгебраїчної суми функцій дорівнює алгебраїчній сумі невизначених інтегралів від кожної функції:



1. Якщо є первісною для , де  і довільні числа , то



Таблиця основних інтегралів.

З означення невизначеного інтегралу маємо, що якщо  то . Виходячи з цього та використовуючи формули диференціювання, можна записати таблицю невизначених інтегралів.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 1. | 5. | 9. |
| 2. | 6. | 10. |
| 3. | 7. | 11. |
| 4. | 8. | 12. |

Основними методами знаходження невизначеного інтегралу є:

* безпосереднє інтегрування;
* метод заміни змінної (підстановки);
* інтегрування частинами.

Під безпосереднім інтегруванням розуміють такий спосіб знаходження інтегралу, коли шляхом тотожних перетворень підінтегральної функції та застосування властивостей невизначеного інтегралу приходять до одного чи декількох табличних інтегралів.

Суть методу заміни змінної полягає в тому, що шляхом введення нової змінної інтегрування вдається звести заданий інтеграл до нового інтегралу, який порівняно легко береться безпосередньо.

Метод інтегрування частинами застосовують при інтегруванні функцій, що містять добуток, логарифми, обернені тригонометричні функції. Суть методу інтегрування частинами полягає у тому, що при обчисленні інтегралу цим методом підінтегральний вираз  записується у вигляді добутку множників  і ; при цьому  завжди входить до . В результаті отримуємо, що заданий інтеграл знаходять частинами: спочатку знаходять , а потім .

 – формула інтегрування частинами.

Зміст і послідовність виконання завдань.

1. Знайти невизначені інтеграли безпосередньо:

|  |  |
| --- | --- |
| 1.1. ; | . |
| 1.2. ; | . |
| 1.3. ; | . |
| 1.4. ; | . |

2. Знайти невизначені інтеграли методом заміни змінної:

|  |  |
| --- | --- |
| 2.1. ; | . |
| 2.2. ; | . |
| 2.3. ; | . |
| 2.4. ; | . |

3. Знайти невизначені інтеграли методом інтегрування частинами:

3.1. ;

3.2. ;

3.3. ;

3.4. .

Методичні рекомендації з виконання і оформлення: оформити результати, написати висновки.

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 7 п. 7.1 – п. 7.5 с.119;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р ІV Глава VІII § 1 - § 5 с. 309.*

 Контрольні питання.

1. Дайте означення первісної.

2. Сформулюйте теорему про існування первісної.

3. Що називається невизначеним інтегралом?

4. Які методи інтегрування ви знаєте?

5. В яких випадках застосовується метод інтегрування частинами?

**Тема. Визначений інтеграл**

Практична робота № 11

Тема: *Обчислення визначених інтегралів основними методами. Застосування визначених інтегралів до розв’язування задач економічного змісту.*

Мета: навчитися обчислювати визначені інтеграли, знаходити площі фігур, обмежених лініями, об’єми тіл обертання.

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** таблицю інтегралів елементарних функцій; властивості визначених інтегралів; методи обчислення інтегралів; основні задачі, де можна застосувати визначений інтеграл.

**вміти** обчислювати визначені інтеграли, знаходити площі фігур, обмежених лініями, об’єми тіл обертання.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** ***Визначеним інтегралом для функції  на відрізку *** називається границя, до якої прямує інтегральна сума при прямуванні до нуля довжини найбільшого часткового проміжку. Він позначається символом  і читається «інтеграл від *a* до *b* від функції ****** по *dx*», або скорочено «інтеграл від *a* до *b* від *f(x)dx*».

***Криволінійною трапецією*** називають фігуру, обмежену графіком неперервної функції ******, де , прямими ,  та віссю *ОХ*.

Отже, геометричний зміст визначеного інтегралу – *це площа криволінійної трапеції.*

Основні властивості визначеного інтегралу

1. Визначений інтеграл з однаковими межами інтегрування дорівнює нулю:



2. При перестановці меж інтегрування визначений інтеграл змінює знак на протилежний:



3. Відрізок інтегрування можна розбивати на частини:

 де 

4. Сталий множник можна винести за знак визначеного інтеграла:



5. Визначений інтеграл від алгебраїчної суми скінченого числа функцій дорівнює алгебраїчній сумі визначених інтегралів від функцій, що додаються:



Визначений інтеграл обчислюють за формулою Ньютона-Лейбніца, яка має вигляд

 – формула Ньютона-Лейбніца.

Зміст і послідовність виконання завдань

1. Обчислити визначені інтеграли:

1.1 а); б); в)  г) .

1.2 а); б) ; в) .

1.3 а); б) ; в) .

1.4 а)  б)  в)  г) 

2. Знайти площу фігури, обмеженої лініями:

2.1 .

2.2 

2.3 .

2.4 

3. Обчислити об’єми тіл обертання:

3.1 .

3.2 .

3.3 .

3.4 .

Методичні рекомендації з виконання і оформлення: оформити результати, написати висновки.

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 8 3 п. 8.1 -п. 8.6 с.140;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р VIIІ Глава ІX § 1 - § 6 с. 334.*

 Контрольні питання.

1. Який геометричний зміст визначеного інтегралу?

2. За якою формулою обчислюється визначений інтеграл?

3. Як обчислити площу фігури, обмеженої лініями?

4. Як знайти межі інтегрування?

5. За якою формулою обчислюється об’єм тіла обертання? Прокоментуйте її.

**Тема Диференціальні рівняння першого порядку**

Практична робота № 12

Тема: *Розв’язування диференціальних рівнянь з відокремленими та відокремлюваними змінними.*

Мета: навчитися розв’язувати диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними першого порядку.

**** Після вивчення теми студент повинен:

**знати** таблицю інтегралів елементарних функцій; основні поняття і означення про диференціальні рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними першого порядку.

**вміти** знаходити загальний та частковий розв’язки диференціального рівняння з відокремленими та відокремлюваними змінними першого порядку.

Матеріально-технічне оснащення робочого місця: *інструкційна картка, калькулятор.*

Інструктаж з техніки безпеки: техніка безпеки під час роботи в навчальній аудиторії.

Короткі теоретичні відомості.

**** *Диференціальним рівнянням* називається рівняння, яке пов’язує між собою незалежну змінну х, шукану функцію у та її похідні або диференціали.

Символічно диференціальні рівняння записується так:

  .

Диференціальне рівняння називається *звичайним*, якщо шукана функція залежить від одного незалежного змінного.

Порядком диференційного рівняння називається порядок старшої похідної (або диференціала), яка входить в дане рівняння.

*Розв’язком (*або *інтегралом)* диференціального рівняння називається така функція, яка перетворює це рівняння в тотожність.

*Частинним розв’язком* (або *загальним інтервалом*) диференціального рівняння називається розв’язок знайдений із загального при різних числових значеннях довільних сталих. Значення довільних сталих знаходять при певних початкових значеннях аргументу і функції.

Графік частинного розв’язку диференціального рівняння називається *інтегральною кривою.*

Загальному розв’язку диференціального рівняння відповідає сукупність (сім’я) всіх інтегральних кривих.

*Диференціальне рівнянням першого порядку* називається рівняння, до якого входять похідні (або диференціали) не вище як першого порядку.

*Диференціальним рівнянням з відокремлюваними змінними* називається рівняння вигляду 

Щоб розв’язати це рівняння, треба з початку відокремити змінні 

а потім проінтегрувати обидві частини знайденої рівності



1. Знайти розв’язки диференціального рівняння:

1.1 

1.2 

1.3 

1.4 

Методичні рекомендації з виконання і оформлення: оформити результати, написати висновки.

Рекомендована література: 1) *Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с., Р 9 п. 9 с.255;*

*2) Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с.;*

*Р V Глава XIIІ § 1 - § 4 с. 507.*

Контрольні питання.

1. Яке рівняння називається диференціальним?

2. Що називають розв’язком диференціального рівняння?

3. Що означає розв’язати задачу Коші.

**Рекомендовані джерела інформації**

**Основні**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с. |
| 2. | Литвин І.І. Вища математика. Навчальний посібник. – Київ: Центр навчальної літератури, – 2004. – 368 с. |
| 3. | Дубовик В.П., Юрик І.І., Вовкодав І.П. та ін. Вища математика: Навчальний посібник. / В.П. Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. – К.: А.С.К., 2001. – 648 с. |
| 4. | Дубовик В.П., Юрик І.І., Вовкодав І.П. та ін. Вища математика: Збірник задач./ В.П .Дубовик, І.І. Юрик, І.П. Вовкодав та ін. – К.: А.С.К., 2001. – 480 c. |
| 5. | Богомолов М.В. Практичні заняття з математики. / М.В .Богомолов. – К.: Вища школа, 1983. – 447 с. |
| 6. | Яковлєв Г.М. Алгебра і початки аналізу: В 2-х ч. / Г.М. Яковлєв. – К.: Вища школа, 1984. – 293с. |
| 7. | Чухрай З.Б. Вища математика: теорія, практика, застосування в професійній діяльності економіста: Навчально-методичний посібник для студентів коледжів. – Рівне: Волинські обереги, 2012. – 436 с. |

**Додаткові**

|  |  |
| --- | --- |
| 1. | Лавренчук В. П. Математика для економістів: теорія та застосування [Текст] / В. П. Лавренчук, Т. І. Готинчан, В.С. Дронь, О.С. Кондур. – К.: Кондор, 2007. – 595 с. |
| 2. | Васильченко І.П. Вища математика для економістів. Основні розділи: Підручник. Видання друге. – К.: Кондор-Видавництво, 2012. – 608 с. |
| 3. | Нерух О.Г., Ружицька Н.М. Лінійна алгебра та аналітична геометрія. / О.Г. Нерух, Н.М. Ружицька. – К.: Кондор, 2008. – 196 с. |

**Електронні ресурси**

**КОРОТКИЙ СЛОВНИК МАТЕМАТИЧНИХ ТЕРМІНІВ**

***Асимптота кривої***  – пряма лінія, до якої необмежено наближуються точки графіка функції при віддаленні їх у нескінченність.

***Вектор*** – напрямлений відрізок прямої.

***Геометричний зміст похідної*** – значення похідної в точці з абсцисою дорівнює тангенсу кута нахилу дотичної до графіка функції і дорівнює кутовому коефіцієнту дотичної.

***Геометричний зміст визначеного інтегралу –***

***Границя функції*** – таке число *А* для функції  в точці , якщо для будь-якого додатного числа  знайдеться таке додатне число , що при всіх , , які задовольняють нерівність , виконується нерівність .

***Графік функції*** – множина всіх точок координатної площини, абсциси яких дорівнюють значенням аргументу, а ординати – відповідним значенням функції.

***Диференціал  функції  в точці ***–головна, лінійна відносно , частина приросту функції  в цій точці, тобто .

***Диференціальне рівняння*** – рівняння, яке пов’язує між собою незалежну змінну *х,* шукану функцію  *у* та її похідні або диференціали.

***Диференціювання*** – операція знаходження похідної ** функції ******.

***Економічний зміст похідної*** – продуктивність праці виробника в момент часу ****** тобто ******.

***Зростаюча функція*** – функція, для якої більшому значенню аргументу відповідає більше значення функції на деякому проміжку.

***Інтегрування*** – операція знаходження первісної  функції ****** на проміжку .

***Інтегральна крива*** – графік частинного розв’язку диференціального рівняння називається*.*

***Криволінійна трапеція*** – фігура, обмежена графіком неперервної функції ******, де , прямими ,  та віссю *ОХ*.

***Механічний зміст похідної*** – швидкість зміни функції при зміні аргументу, тобто .

***Монотонність функції*** – властивість функції, яка передбачає розгляд проміжків зростання і спадання функції.

***Невизначений інтеграл*** – сукупність  всіх первісних функції  на проміжку .

***Область визначення*** – множина всіх значень, яких набуває незалежна змінна ******.

***Область значень*** – множина всіх значень, яких набуває залежна змінна (функція) .

***Похідна функції в точці*** – границя відношення приросту функції до приросту аргументу, коли приріст аргументу прямує до нуля, а границя існує, тобто ******.

***Розв’язком (*або *інтегралом)***диференціального рівняння називається така функція, яка перетворює це рівняння в тотожність.

***Спадна функція*** – функція, для якої більшому значенню аргументу відповідає менше значення функції на деякому проміжку.

***Функція*** – взаємнооднозначна залежність змінної  від змінної  , коли кожному значенню незалежної змінної  відповідає ***єдине*** значення залежної змінної .

***Функція двох змінних***  – залежність, коли кожній парі незалежних одне від одного чисел  з деякої множини за якимось правилом ставиться у відповідність одне або кілька значень змінної *z*.

***Частинний розв’язок*** (або *загальним інтегралом*) диференціального рівняння – називається розв’язок знайдений із загального при різних числових значеннях довільних сталих